数理解析研究所講究録
1110 巻 1999 年 18-28

STRUCTURE OF GROUP C^*-ALGEBRAS OF THE GENERALIZED DIXMIER GROUPS

須藤　隆洋 (SUDO TAKAHIRO)

琉球大学理学部

この講演の内容は次のとおりである：

§1. Dixmier 群の C*-群環の構造.

§2. Generalized Dixmier 群の C*-群環の構造.

§3. 多重対角作用をもつリー半直積の場合.

§4. 対角作用をもつリー半直積の場合.

§1. Dixmier 群の C*-群環の構造

まず最初に、実 3 次元 Heisenberg 群の C*-群環の構造について復習する。

実 3 次元 Heisenberg 群 H_3は、次の行列全体からなる単連結巾零リー群である：

$$g = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (c, b, a), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

そして、H_3はリー半直積 $\mathbb{R}^2 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ に同型である。ただし、作用は、$\alpha_a(c, b) = (c + ab, b)$. このとき、$H_3$の C*-群環 $C^*(H_3)$ は、接合積の定義とフーリエ変換により次に同型である：

$$C^*(H_3) \cong C^*(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R} \cong C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{R}.$$

ただし、$\hat{\alpha}$は、$\mathbb{R}^2$の双対群 $\mathbb{R}^2$上の作用で、$\hat{\alpha}_a(l, m) = (l, m + al)$, $(l, m) \in \mathbb{R}^2$. このとき、$\{0\} \times \mathbb{R}$ は、$\hat{\alpha}$で不動で、$\mathbb{R}^2$で閉なので、次の完全列がえられる：

$$0 \to C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R} \to C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R} \to C_0(\mathbb{R}^2) \to 0.$$

さらに、$(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ 上の作用$\hat{\alpha}$ は、自由かつ遊走的 (wandering) なので、次をえる [Gr1; Corollary 15]：

$$C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R} \cong C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \otimes \mathbb{K}$$

ただし、$(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ の$\hat{\alpha}$による軌道空間が $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ に同相である。

次に、実 7 次元 Dixmier 群の C*-群環の構造を考察する。

RIMS, 1999 年 1 月

定義. 実 7 次元 Dixmier 群 D_7は、半直積 $\mathbb{C}^2 \rtimes_\beta H_3$で定義される。ただし、

$$\beta_g(z_1, z_2) = (e^{ia}z_1, e^{ib}z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, g = (c, b, a) \in H_3$$
$$\beta_g = \begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{ib} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}).$$

D_7は I 型でない単連結可解リー群である [Dx1]. そして、

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\pi k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

とおくと、商群 D_7/Γは I 型連結可解リー群で、リー半直積 $\mathbb{C}^2 \rtimes (H_3/\Gamma)$ に同型である。ただし、$H_3/\Gamma \cong (\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}$.

接合積の定義とフーリエ変換により

$$C^*(D_7) \cong C^*(\mathbb{C}^2) \rtimes_\beta H_3 \cong C_0(\mathbb{C}^2) \rtimes_{\hat{\beta}} H_3.$$

ただし、$\hat{\beta}_g(w_1, w_2) = (e^{-ia}w_1, e^{-ib}w_2)$, $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$. $\mathbb{C}^2$の原点 0_2は、$\hat{\beta}$で不動なので、次の完全列がえられる：

$$0 \to C_0(\mathbb{C}^2 \setminus \{0_2\}) \rtimes H_3 \to C_0(\mathbb{C}^2) \rtimes H_3 \to C^*(H_3) \to 0.$$

さらに、$(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \{0\}$ と $\{0\} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ は、$\hat{\beta}$不変で、$\mathbb{C}^2 \setminus \{0_2\}$ で閉なので、次は完全である：

$$0 \to C_0((\mathbb{C} \setminus \{0\})^2) \rtimes H_3 \to C_0(\mathbb{C}^2 \setminus \{0_2\}) \rtimes H_3 \to \oplus_{i=1}^2 C_0(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \rtimes_{\hat{\beta}_i} H_3 \to 0.$$

ただし、$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$は、それぞれ$\hat{\beta}$の $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \{0\}$, $\{0\} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ への制限である。

各作用$\hat{\beta}_i$は、各 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上で回転なので、

$$C_0(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \rtimes_{\hat{\beta}_i} H_3 \cong C_0(\mathbb{R}_+) \otimes (C(\mathbb{T}) \rtimes H_3).$$

そして、H_3のトーラス $\mathbb{T}$ 上の作用は推移的で、$w_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の固定群 $(H_3)_{w_i}$による商空間 $H_3/(H_3)_{w_i}$は $\mathbb{T}$ に同相で、作用βと両立するので、

$$C(\mathbb{T}) \rtimes H_3 \cong C(H_3/(H_3)_{w_i}) \rtimes H_3.$$

Green の imprimitivity 定理 [Gr2; Corollary 2.10] より、

$$C(H_3/(H_3)_{w_i}) \rtimes H_3 \cong C^*((H_3)_{w_i}) \otimes \mathbb{K}(L^2(\mathbb{T})).$$

一方、次がわかる：

$$(H_3)_{w_1} = \mathbb{R}^2 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}, \quad (H_3)_{w_2} = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \rtimes_\alpha \mathbb{R}.$$

接合積の定義とフーリエ変換により、

$$C^*((H_3)_{w_1}) \cong C^*(\mathbb{R}^2) \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \cong C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{Z},$$
$$\hat{\alpha}_a(l,m) = (l, m+al), \quad (l,m) \in \mathbb{R}^2, a \in \mathbb{Z}.$$

$\{0\} \times \mathbb{R}$ は、$\hat{\alpha}$で不動なので、次の完全列がえられる：

$$0 \to C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z} \to C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{Z} \to C_0(\mathbb{R}) \otimes C^*(\mathbb{Z}) \to 0.$$

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ 上の $\mathbb{Z}$ の作用は、自由かつ遊走的であることに注意する。上のイデアルに対しては Green の結果 [Gr1]、quotient についてはフーリエ変換より、

$$\begin{cases} C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z} \cong C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}) \otimes \mathbb{K}(l^2(\mathbb{Z})), \\ C_0(\mathbb{R}) \otimes C^*(\mathbb{Z}) \cong C_0(\mathbb{R}) \otimes C(\mathbb{T}) \cong C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \end{cases}$$

ただし、$(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ の $\mathbb{Z}$ による商空間が $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}$ に同相である。
同様にして、

$$C^*((H_3)_{w_2}) = C^*(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \rtimes_\alpha \mathbb{R} \cong C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{R}$$
$$\hat{\alpha}_a(l, e^{im}) = (l, e^{i(m+al)}), \quad (l, e^{im}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}.$$

$\{0\} \times \mathbb{T}$ は、$\hat{\alpha}$で不動で、$\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ で閉なので、

$$0 \to C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R} \to C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R} \to C_0(\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \to 0.$$

さらに、イデアルは直和に分解する。

$$C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R} \cong \oplus^2 (C_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R}).$$

そして、各直和因子は、$\mathbb{R}_+$上の連続場の C*-環とみなせて、$C_0(\mathbb{R}_+, \cup_{\mathbb{R}_+} C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R})$ とかく。ただし、各ファイバーが $C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R}$ である。$\mathbb{R}$ の $\mathbb{T}$ 上の作用は回転なので、

$$\begin{aligned} C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R} &\cong C(\mathbb{R}/\mathbb{R}_1) \rtimes \mathbb{R} \\ &\cong C^*(\mathbb{R}_1) \otimes \mathbb{K}(L^2(\mathbb{T})) \cong C(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{K}. \end{aligned}$$

ただし、$\mathbb{R}_1$は $1 \in \mathbb{T}$ の固定群で、$\mathbb{Z}$ に同型である。コホモロジー群 $H^3(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ が消えていることから、Dixmier-Douady の結果 (cf.[Dx2]) より、

$$C_0(\mathbb{R}_+, \cup_{\mathbb{R}_+} C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R}) \cong C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \otimes \mathbb{K}.$$

次に、接合積 $C_0((\mathbb{C} \setminus \{0\})^2) \rtimes H_3$の構造を解析する。$H_3$の $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$上の作用は、多重回転なので、

$$C_0((\mathbb{C} \setminus \{0\})^2) \rtimes H_3 \cong C_0(\mathbb{R}_+^2) \otimes (C(\mathbb{T}^2) \rtimes H_3).$$

さらに、H_3の $\mathbb{T}^2$上の作用は推移的なので、

$$C(\mathbb{T}^2) \rtimes H \cong C(H_3/(H_3)_{1_2}) \rtimes H_3.$$

ただし、$(H_3)_{1_2}$は $1_2 = (1,1) \in \mathbb{T}^2$の固定群である。次に Green の imprimitivity 定理より、

$$C(H_3/(H_3)_{1_2}) \rtimes H_3 \cong C^*((H_3)_{1_2}) \otimes \mathbb{K}(L^2(\mathbb{T}^2)).$$

そして、$(H_3)_{1_2} = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ がわかる。ゆえに、

$$C^*((H_3)_{1_2}) \cong C^*(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \cong C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{Z}$$
$$\hat{\alpha}_a(l, e^{im}) = (l, e^{i(m+al)}), \quad (l, e^{im}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, a \in \mathbb{Z}.$$

$\{0\} \times \mathbb{T}$ は$\hat{\alpha}$で不動で、$\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ で閉なので、

$$0 \to C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z} \to C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z} \to C(\mathbb{T}) \otimes C^*(\mathbb{Z}) \to 0.$$

そして、イデアルは直和に分解する：

$$C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z} \cong \oplus^2(C_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z}).$$

さらに、各直和因子は、$\mathbb{R}_+$上の連続場の C*-環とみなせて、次のようにかく：

$$C_0(\mathbb{R}_+, \cup_{\theta \in \mathbb{R}_+} C(\mathbb{T}) \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \equiv C_0(\mathbb{R}_+, \cup_{\theta \in \mathbb{R}_+} \mathfrak{A}_\theta).$$

ただし、各ファイバーは、$\theta \in \mathbb{R}_+$により無理数か有理数回転環 $\mathfrak{A}_\theta = C(\mathbb{T}) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ であり、$\theta_a(e^{im}) = e^{i(m+a\theta)}$, $e^{im} \in \mathbb{T}, a \in \mathbb{Z}$.

以上をまとめると、次がなりたつ：

定理 1.1. *D_7を実 7 次元 Dixmier 群とする。このとき、$C^*(D_7)$ は有限組成列*

$$\mathfrak{I}_3 = C^*(D_7),$$
$$\mathfrak{I}_2 = C_0(\mathbb{C}^2 \setminus \{0_2\}) \rtimes H_3,$$
$$\mathfrak{I}_1 = C_0((\mathbb{C} \setminus \{0\})^2) \rtimes H_3$$

をもち、各 subquotient は次に同型である：

$$\mathfrak{I}_3/\mathfrak{I}_2 \cong C^*(H_3) = C^*((H_3)_{0_2}),$$
$$\mathfrak{I}_2/\mathfrak{I}_1 \cong \oplus_{i=1}^2 (C_0(\mathbb{R}_+) \otimes C^*((H_3)_{w_i}) \otimes \mathbb{K})$$
$$\mathfrak{I}_1 \cong C_0(\mathbb{R}_+^2) \otimes C^*((H_3)_{1_2}) \otimes \mathbb{K}.$$

さらに、固定群の C^*-群環の構造は次であたえられる：

$$\begin{cases} 0 \to C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \otimes \mathbb{K} \to C^*(H_3) \to C_0(\mathbb{R}^2) \to 0 \\ 0 \to C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}) \otimes \mathbb{K} \to C^*((H_3)_{w_i}) \to C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \to 0 \\ 0 \to \oplus^2 C_0(\mathbb{R}_+, \cup_{\theta \in \mathbb{R}_+} \mathfrak{A}_\theta) \to C^*((H_3)_{1_2}) \to C(\mathbb{T}^2) \to 0. \end{cases}$$

注. H_3を H_3/Γで置き換えると、各固定群の C*-群環の構造は次で与えられる：

$$\begin{cases} C^*(H_3/\Gamma) \cong (\oplus_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}} \mathbb{K}) \oplus C_0(\mathbb{R}^2) \\ C^*((H_3/\Gamma)_{w_i}) \cong (\oplus_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}} C(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{K}) \oplus C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \\ C^*((H_3/\Gamma)_{1_2}) \cong C_0(\mathbb{Z} \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z} \cong \oplus_{\mathbb{Z}} C(\mathbb{T}^2). \end{cases}$$

ただし、$C(\mathbb{T}) \rtimes_{2\pi k} \mathbb{Z} \cong C(\mathbb{T}^2)$ for $k \in \mathbb{Z}$.

上の定理で、H_3 の各固定群の C*-群環は $\mathbb{R}$ 上の連続場の C*-環とみなせて、各ファイバー $\{\mathfrak{B}_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ はそれぞれ次であたえらる：

$$\mathfrak{B}_\theta \cong \begin{cases} C_0(\mathbb{R}^2) \\ \mathbb{K} \end{cases} \begin{cases} C_0(\mathbb{R}\times\mathbb{T}) \\ C(\mathbb{T})\otimes\mathbb{K} \end{cases} \begin{cases} C(\mathbb{T}^2) & \theta = 0 \\ \mathfrak{A}_\theta & \theta \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$$

上の定理と注から次がわかる：

系 **1.2.** D_7を実 7 次元 *Dixmier* 群とすると、$C^*(D_7)$ は次の連続場の C^*-環の拡大を繰り返してえられる：

$$\begin{cases} C_0(\mathbb{R}, \cup_{\theta\in\mathbb{R}}\mathfrak{B}_\theta) \\ \oplus^2 C_0(\mathbb{R}, \cup_{\theta\in\mathbb{R}}(C_0(\mathbb{R}_+)\otimes\mathfrak{B}_\theta\otimes\mathbb{K})) \\ C_0(\mathbb{R}, \cup_{\theta\in\mathbb{R}}(C_0(\mathbb{R}_+^2)\otimes\mathfrak{B}_\theta\otimes\mathbb{K})) \end{cases}$$

ただし、各ファイバー $\mathfrak{B}_\theta$は上の注であたえられる。

定理 1.1 の組成列の細分をとり、次がえられる：

定理 **1.3.** D_7を実 7 次元 *Dixmier* 群とする。このとき、$C^*(D_7)$ の有限組成列 $\{\mathfrak{D}_j\}_{j=1}^{11}$ が存在して、次がいえる：

$$\mathfrak{D}_j/\mathfrak{D}_{j-1} \cong \begin{cases} C_0(\mathbb{R}^2), & j = 11 \\ C_0(\mathbb{R}\setminus\{0\})\otimes\mathbb{K}, & j = 10 \end{cases}$$
$$\mathfrak{D}_j/\mathfrak{D}_{j-1} \cong \quad C_0(\mathbb{R}^2\times\mathbb{T})\otimes\mathbb{K}, \quad 4 \le j \le 9$$
$$\mathfrak{D}_j/\mathfrak{D}_{j-1} \cong \begin{cases} C_0(\mathbb{R}_+^2\times\mathbb{T}^2)\otimes\mathbb{K}, & j = 3 \\ C_0(\mathbb{R}_+^2)\otimes\mathbb{K}\otimes C_0(\mathbb{R}_+, \cup_{\theta\in\mathbb{R}_+}\mathfrak{A}_\theta), & j = 1,2. \end{cases}$$

定理 1.3 の有限組成列に、stable rank と connected stable rank の基本公式を適用して次がえられる：

系 **1.4.** D_7を実 7 次元 *Dixmier* 群とする。このとき、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(C^*(D_7)) = 2 = \dim_{\mathbb{C}}(D_7)_1^\wedge \\ \mathrm{csr}(C^*(D_7)) = 2. \end{cases}$$

ただし、

$$\dim_{\mathbb{C}}(D_7)_1^\wedge = [\dim(D_7)_1^\wedge/2] + 1.$$

ここで、$(D_7)_1^\wedge$は、D_7の 1 次元表現全体のなす空間、$[\cdot]$ はガウス記号をそれぞれ意味する。

証明. 定理 1.3 より、$(D_7)_1^\wedge$は、$\mathbb{R}^2$に同相であることに注意する。

定理 1.3 より、subquotients $\mathfrak{D}_j/\mathfrak{D}_{j-1}$ $(1 \le j \le 10)$ は stable である。ゆえに、

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{D}_j/\mathfrak{D}_{j-1}) \le 2, \quad \mathrm{csr}(\mathfrak{D}_j/\mathfrak{D}_{j-1}) \le 2, \quad (1 \le j \le 10).$$

C^*-環の完全列に対する stable rank と connected stable rank の評価式 ([Rf],[Sh],[Ns]) を帰納的に用いて、次がわかる：

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{D}_j) \le 2, \quad \mathrm{csr}(\mathfrak{D}_j) \le 2, \quad (1 \le j \le 10).$$

したがって、

$$2 = \mathrm{sr}(C_0(\mathbb{R}^2)) \le \mathrm{sr}(C^*(D_7)) \le 2 \vee \mathrm{sr}(C_0(\mathbb{R}^2)) \vee \mathrm{csr}(C_0(\mathbb{R}^2)) = 2,$$
$$\mathrm{csr}(C^*(D_7)) \le 2 \vee \mathrm{csr}(C_0(\mathbb{R}^2)) = 2.$$

一方、次の同型が成り立つことに注意する：

$$D_7 = \mathbb{C}^2 \rtimes H_3 \cong ((\mathbb{R}^4) \rtimes \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}).$$

ゆえに、$C^*(D_7) \cong (C_0(\mathbb{R}^4) \rtimes \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}$. C^*-環の K-群についての Connes の Thom 同型 (cf.[Cn],[Wo]) を繰り返し用いると、

$$K_1(C^*(D_7)) \cong K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}.$$

Hassan の結果 [Hs] より、$\mathrm{csr}(C^*(D_7)) \ge 2$. □

定理 1.3 のもう一つの応用として、次が簡単にわかる：

系 1.5. D_7を実 7 次元 *Dixmier* 群とすると、$C^*(D_7)$ は自明でない射影元をもたない。

証明. もし自明でない射影元が、ある C*-環に存在するならば、任意の商 C*-環でのその像は自明でない射影元か、零である。一方、$C^*(D_7)$ の各 subquotient は自明でない射影元をもたない。なぜなら、各 subquotient ($j \neq 10$) と subquotient ($j = 10$) の各直和因子はコンパクトでない連結空間上の可換 C*-環をテンソル因子としてもつからである。□

§2. Generalized Dixmier 群の C*-群環の構造

まず始めに一般 Heisenberg 群の定義を復習する。実 $(2n+1)$ 次元一般 Heisenberg 群 H_{2n+1}は、次の行列：

$$g = (c, b, a) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n & c \\ & \ddots & & 0 & b_1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & b_n \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$c \in \mathbb{R}$, $b = (b_1, \cdots, b_n), a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, 全体からなる単連結巾零リー群である。

次に generalized Dixmier 群の定義をする。

定義. 実 $(6n+1)$ 次元一般 (generalized)Dixmier 群 D_{6n+1}は、半直積 $\mathbb{C}^{2n} \rtimes_\beta H_{2n+1}$で定義される。ただし、作用$\beta$を次で定義する：

$$\beta_g(z, z') = ((e^{ia_i} z_i), (e^{ib_i} z_{n+i})), \quad z = (z_i), z' = (z_{n+i}) \in \mathbb{C}^n, g \in H_{2n+1}$$

$$\beta_g = \begin{pmatrix} e^{ia_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{ia_n} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e^{ib_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{ib_n} \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{C}).$$

§1 と同様の考察をさらに押しすすめることにより、次がえられる：

定理 **2.1.** D_{6n+1}を実$(6n+1)$次元 *generalized Dixmier*群とする。このとき、$C^*(D_{6n+1})$の有限組成列$\{\mathfrak{I}_j\}_{j=1}^{2n+1}$が存在して、各 *subquotient* $\mathfrak{I}_{2n+1-k}/\mathfrak{I}_{2n-k}$は次に同型である：

$$\begin{cases} C^*(H_{2n+1}) = C^*((H_{2n+1})_{1_0}) & k=0 \\ \oplus_{1\le i_1<\cdots<i_k\le 2n} C_0(\mathbb{R}_+^k)\otimes C^*((H_{2n+1})_{1_k})\otimes \mathbb{K}(L^2(\mathbb{T}^k)) & 1\le k\le 2n. \end{cases}$$

ただし、$(H_{2n+1})_{1_k}$は双対作用$\hat{\beta}$における$1_0 = 0_{2n}\in\mathbb{C}^{2n}$または$1_k = (1,\cdots,1)\in\mathbb{T}^k\subset\mathbb{C}^{2n}$の固定群である。さらに、次がえられる：

$$0\to\mathfrak{L}_k\to C^*((H_{2n+1})_{1_k})\to C(\mathbb{T}^k)\otimes C_0(\mathbb{R}^{2n-k})\to 0$$

$0\le k\le 2n$, そして、$\mathfrak{L}_k$は次に同型である：

$$\begin{cases} C_0(\mathbb{R}\setminus\{0\})\otimes\mathbb{K} & k=0 \\ C_0((\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{T})\otimes\mathbb{K}, & k=1 \\ C_0((\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{T}^k)\otimes\mathbb{K} \quad or & \\ C_0(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cup_{\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}((\otimes^{s_1}\mathfrak{A}_\theta)\otimes C(\mathbb{T}^{s_2})\otimes\mathbb{K})) & 2\le k\le n \\ C_0(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cup_{\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}((\otimes^{s_1}\mathfrak{A}_\theta)\otimes C(\mathbb{T}^{s_2})\otimes\mathbb{K})) & n+1\le k\le 2n-1 \\ C_0(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cup_{\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\otimes^n\mathfrak{A}_\theta) & k=2n \end{cases}$$

$s_1\ge 1$, $s_2\ge 0$, $2s_1+s_2=k$. ただし、4,5と6番目は、それぞれ$\mathbb{R}\setminus\{0\}$上の連続場のC^*-環を意味し、各ファイバーはC^*-テンソル積$(\otimes^{s_1}\mathfrak{A}_\theta)\otimes C(\mathbb{T}^{s_2})\otimes\mathbb{K}$と$\otimes^n\mathfrak{A}_\theta$であり、そして、$\mathfrak{A}_\theta$は$\theta$により無理数か有理数回転環である。

上の定理は次のように言い換えられる：

系 **2.2.** D_{6n+1}を実$(6n+1)$次元 *generalized Dixmier*群とすると、$C^*(D_{6n+1})$は次の連続場のC^*-環による拡大を繰り返してえられる：

$$\begin{cases} C_0(\mathbb{R},\cup_{\theta_0\in\mathbb{R}}\mathfrak{B}_{\theta_0}) & k=0 \\ \oplus_{1\le i_1<\cdots<i_k\le 2n} C_0(\mathbb{R},\cup_{\theta_k\in\mathbb{R}} C_0(\mathbb{R}_+^k)\otimes\mathfrak{B}_{\theta_k}\otimes\mathbb{K}(L^2(\mathbb{T}^k)) & 1\le k\le 2n, \end{cases}$$

ただし、各ファイバーの各テンソル因子$\mathfrak{B}_{\theta_k}$はそれぞれ次で与えられる：

$$\mathfrak{B}_{\theta_0}\cong\begin{cases} C_0(\mathbb{R}^{2n}) & \theta_0=0 \\ \mathbb{K} & \theta_0\ne 0 \end{cases} \quad \mathfrak{B}_{\theta_1}\cong\begin{cases} C_0(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^{2n-1}) & \theta_1=0 \\ C(\mathbb{T})\otimes\mathbb{K} & \theta_1\ne 0 \end{cases}$$

$$\mathfrak{B}_{\theta_k}\cong\begin{cases} C_0(\mathbb{T}^k\times\mathbb{R}^{2n-k}) \\ C(\mathbb{T}^k)\otimes\mathbb{K} \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} C_0(\mathbb{T}^k\times\mathbb{R}^{2n-k}) & \theta_k=0 \\ (\otimes^{s_1}\mathfrak{A}_{\theta_k})\otimes C(\mathbb{T}^{s_2})\otimes\mathbb{K} & \theta_k\ne 0 \end{cases}$$

for $2\le k\le 2n$ *with* $s_1\ge 1$, $s_2\ge 0$, $k=2s_1+s_2$.

さらに、定理2.1の組成列の細分をとり、次がえられる：

定理 **2.3.** D_{6n+1}を実 $(6n+1)$ 次元 *generalized Dixmier* 群とすると、$C^*(D_{6n+1})$ の有限組成列 $\{\mathfrak{K}_j\}_{j=1}^K$ が存在して、各 *subquotient* $\mathfrak{K}_j/\mathfrak{K}_{j-1}$は次に同型である：

$$\begin{cases} C_0(\mathbb{R}^{2n}) & j=K \\ C_0(\mathbb{R})\otimes\mathbb{K} & or \\ C_0(\mathbb{T}^k\times\mathbb{R}^{2n})\otimes\mathbb{K} & or \\ C_0(\mathbb{T}^k\times\mathbb{R}^{k+1})\otimes\mathbb{K} & or \\ C_0(\mathbb{R}_+^k)\otimes\mathbb{K}\otimes C_0(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cup_{\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}((\otimes^{s_1}\mathfrak{A}_\theta)\otimes C(\mathbb{T}^{s_2})\otimes\mathbb{K})) & \end{cases}$$

for $1\le j\le K-1$ *with* $1\le k\le 2n$, $s_1\ge 1$, $s_2\ge 0$, $2s_1+s_2=k$.

注. 5 番目の場合で、C^*-テンソル積 $(\otimes^{s_1}\mathfrak{A}_\theta)\otimes C(\mathbb{T}^{s_2})$ は、非可換トーラスの特別な場合 $C(\mathbb{T}^{s_1}\times\mathbb{T}^{s_2})\rtimes\mathbb{Z}^{s_1}$に同型である。

Stable rank と connected stable rank の基本公式を定理 2.3 の組成列に帰納的に適用して、次がえられる：

系 **2.4.** D_{6n+1}を実 $(6n+1)$ 次元 *generalized Dixmier* 群とすると、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(C^*(D_{6n+1})) = n+1 = \dim_{\mathbb{C}}(D_{6n+1})_1^\wedge \\ \mathrm{csr}(C^*(D_{6n+1})) \le n+1. \end{cases}$$

証明は、系 1.4 のそれと同様である。

定理 2.3 の組成列をもちいて、系 1.5 と同じ理由から次がえられる：

系 **2.5.** D_{6n+1}を実 $(6n+1)$ 次元 *generalized Dixmier* 群とすると、$C^*(D_{6n+1})$ は自明でない射影元を持たない。

§3. 多重対角作用をもつリー半直積の場合

N を連結リー群とし、G を半直積 $\mathbb{C}^n\rtimes_\alpha N$ で定義される連結リー群とする。このとき、次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\alpha} & GL_n(\mathbb{C}) \\ {\scriptstyle\exp}\uparrow & & {\scriptstyle\exp}\uparrow \\ \mathfrak{N} & \xrightarrow{d\alpha} & M_n(\mathbb{C}) \end{array}$$

ただし、$\mathfrak{N}$ は N のリー環で、$d\alpha$はαの微分、exp は指数写像である。さらに、作用αは次の可換図式から誘導されると仮定する：

$$\begin{array}{ccccc} N & \longrightarrow & N/[N,N] & \xrightarrow{\alpha} & GL_n(\mathbb{C}) \\ {\scriptstyle\exp}\uparrow & & {\scriptstyle\exp}\uparrow & & {\scriptstyle\exp}\uparrow \\ \mathfrak{N} & \longrightarrow & \mathfrak{N}/[\mathfrak{N},\mathfrak{N}] & \xrightarrow{d\alpha} & M_n(\mathbb{C}) \end{array}$$

ただし、$[N,N]$, $[\mathfrak{N},\mathfrak{N}]$ は、それぞれ N, $\mathfrak{N}$ の交換子である。このとき、

$$N/[N,N]\cong\mathbb{R}^{n-m}\times\mathbb{T}^m,\quad \mathfrak{N}/[\mathfrak{N},\mathfrak{N}]\cong\mathbb{R}^n$$

for some $n \geq 0$ and $0 \leq m \leq n$. 従って、次の可換図式を考えれば十分である：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m & \xrightarrow{\alpha} & GL_n(\mathbb{C}) \\ \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d\alpha} & M_n(\mathbb{C}). \end{array}$$

さらに、作用αは次の形の複素１次元、多重対角作用であると仮定する：

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t_n} \end{pmatrix}$$

with $t = ((t_i)_{i=1}^{n-m}, (e^{it_j})_{j=n-m+1}^{n}) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ $(1 \leq i \leq n-m)$, $\lambda_j \in i\mathbb{R}$ $(n-m+1 \leq j \leq n)$. このとき、次が成り立つ：

定理 3.1. $G = \mathbb{C}^n \rtimes_\alpha N$, ただし、$N$ は連結リー群で、αは複素１次元、多重対角作用とする。このとき、$C^*(G)$ は有限組成列 $\{\mathfrak{I}_j\}_{j=1}^{n+1}$をもち、各 *subquotients* $\mathfrak{I}_{n-n_0-k+1}/\mathfrak{I}_{n-n_0-k}$ は次に同型である：

$$\begin{cases} C_0(\mathbb{C}^{n_0}) \otimes C^*(N) & k=0 \\ \oplus_{n_0+1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \begin{cases} C_0(\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{T}^k) \otimes \mathbb{K} \\ C_0(\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{T}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}) \otimes C^*(N_{1_k}) \otimes \mathbb{K} \end{cases} & 1 \leq k \leq n-n_0 \end{cases}$$

with $0 \leq n_0 \leq n$ *and* $k_2 \geq 1$, $k = k_1 + k_2$. ただし、$\mathbb{C}^{n_0}$は N の作用による $\mathbb{C}^n$の不動点部分空間であり、また、二者択一の最初の場合は、$\mathbb{C}^n$の不変部分空間 $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^k$ 上の N の作用が自由かつ遊走的であることに対応する。

注. N が半単純のとき、$N = [N, N]$ なので、$C^*(G) \cong C_0(\mathbb{C}^n) \otimes C^*(N)$.

特に、$N = H_{2n+1}$の場合は、次が成り立つ：

定理 3.2. G をリー半直積 $\mathbb{C}^{2n} \rtimes_\beta H_{2n+1}$, βは複素１次元、多重対角作用とする。このとき、$C^*(G)$ は有限組成列 $\{\mathfrak{I}_j\}_{j=1}^{K}$をもち、各 *subquotients* $\mathfrak{I}_j/\mathfrak{I}_{j-1}$は次に同型である：

$$\begin{cases} \begin{cases} C_0(\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{R}^{2n}) & j=K \\ C_0(\mathbb{C}^{n_0} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})) \otimes \mathbb{K} & j=K-1 \end{cases} \\ \begin{cases} C_0(\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{T}^k) \otimes \mathbb{K} \\ C_0(\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{T}^{k_1+m_2+l_2} \times \mathbb{R}^{2n-k_1}) \otimes \mathbb{K} & \textit{otherwise} \\ C_0(\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{T}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}) \otimes \mathbb{K} \otimes C_0(\mathbb{R}_+, \cup_{\theta \in \mathbb{R}_+}(C(\mathbb{T}^p) \otimes (\otimes^q \mathfrak{A}_\theta) \otimes \mathbb{K})) \end{cases} \end{cases}$$

for $1 \leq k \leq n - n_0$ *with* $0 \leq n_0 \leq n$ *and* $k_2 \geq 1$, $k = k_1 + k_2$.

系として、

系 3.3. 定理 3.2 と同じ仮定のもとで、次がなりたつ：

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(C^*(G)) = n_0 + n + 1 = \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1, \\ \mathrm{csr}(C^*(G)) \leq n_0 + n + 1. \end{cases}$$

さらに一般の場合は、

系 **3.4.** 定理 3.1 で、N が巾零、またはリー半直積 $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$ ならば、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(C^*(G)) = \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 & \textit{if } \dim \hat{G}_1 \textit{ is even} \\ \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 \le \mathrm{sr}(C^*(G)) \le \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 + 1 & \textit{if } \dim \hat{G}_1 \textit{ is odd} \end{cases}$$

$$\mathrm{csr}(C^*(G)) \le 2 \vee \mathrm{csr}(C_0(\hat{G}_1)) = [(\dim \hat{G}_1 + 1)/2] + 1.$$

次に、$G = \mathbb{C}^s \rtimes_\alpha (\mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m)$ で、αが直和 $\mathbb{C}^s = \oplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{s_i}$上の複素多重次元、多重対角作用、すなわち、

$$\alpha_t = (\oplus_{i=1}^{n-m} \alpha_i(t_i)) \oplus (\oplus_{j=n-m+1}^{n} \alpha_j(e^{it_j})) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n(e^{it_n}) \end{pmatrix}$$

with $t = ((t_i)_{i=1}^{n-m}, (e^{it_j})_{j=n-m+1}^{n}) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m$, とする。ただし、各$\alpha_i$ $(1 \le i \le n-m)$, α_i $(n-m+1 \le i \le n)$ はそれぞれ $\mathbb{C}^{s_i}$上の $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$ のリー作用である。このとき、次が成り立つ：

定理 **3.5.** G をリー半直積 $\mathbb{C}^s \rtimes_\alpha (\mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m)$ で、αは複素多重次元、多重対角作用とする。このとき、$C^*(G)$ の有限組成列 $\{\mathfrak{I}_j\}_{j=1}^K$が存在して、各 *subquotients* $\mathfrak{I}_j/\mathfrak{I}_{j-1}$は次に同型である：

$$C_0(\mathbb{R}^{2u+n-m} \times \mathbb{Z}^m) = C_0(\hat{G}_1) \qquad j = K,$$

$$\begin{cases} C_0(\mathbb{R}^{2u_j+v_j} \times \mathbb{T}^{w_j}) \otimes \mathbb{K} & \textit{or} \\ C_0(\mathbb{R}^{2u_j+v_j} \times \mathbb{T}^{w_j}) \otimes \mathbb{K} \otimes (\otimes_{l=1}^{k_j} \mathfrak{A}_{\Theta_l}) & \textit{or} \\ C_0(\mathbb{R}^{2u_j+v_j}) \otimes \mathbb{K} \otimes (\otimes_{l=1}^{n} \mathfrak{A}_{\Theta_l}) & 1 \le j \le K-1 \end{cases}$$

with $u, u_j, v_j, w_j \ge 0$, $1 \le k_j \le n-1$. ただし、$\mathfrak{A}_{\Theta_l}$は非可換トーラスの特別な場合 $C(\mathbb{T}^{t_l}) \rtimes \mathbb{Z}$ を意味する。

さらに、群がより一般の場合に、次の rank の評価式がえられる：

定理 **3.6.** G はリー半直積 $\mathbb{C}^s \rtimes N$ で、N は連結巾零リー群か、リー半直積 $\mathbb{R}^m \rtimes \mathbb{R}$, さらに、$N$ の作用は $N/[N,N]$ の複素多重次元、多重対角作用から誘導されているとする。このとき、次がなりたつ：

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(C^*(G)) = \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 & \textit{if } \dim \hat{G}_1 \textit{ is even,} \\ \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 \le \mathrm{sr}(C^*(G)) \le \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 + 1 & \textit{if } \dim \hat{G}_1 \textit{ is odd,} \end{cases}$$

$$\mathrm{csr}(C^*(G)) \le \mathrm{csr}(C_0(\hat{G}_1)) = [(\dim \hat{G}_1 + 1)/2] + 1.$$

§4. 対角作用をもつリー半直積の場合

この章では、G はリー半直積 $(\mathbb{R}^u \times \mathbb{C}^v) \rtimes_\alpha (\mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m)$ で、αは対角作用とする。すなわち、α_g, $g = ((g_i)_{i=1}^{n-m}, (e^{ig_j})_{j=n-m+1}^{n}) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m$は次の行列の対角和で定義される：

$$\begin{pmatrix} e^{(\sum_{j=1}^{p_1} g_{i_{1j}})} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{(\sum_{j=1}^{p_u} g_{i_{uj}})} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e^{(\sum_{j=1}^{q_1} w_{i_{1j}} g_{i_{1j}})} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{(\sum_{j=1}^{q_v} w_{i_{vj}} g_{i_{vj}})} \end{pmatrix}$$

with $g_{i_{kj}} \in \{g_i\}_{i=1}^{n-m}$ for $0 \le j \le p_k \le n-m$ $(1 \le k \le u)$, and $w_{i_{kj}} \in \mathbb{C}$, $g_{i_{kj}} \in \{g_i\}_{i=1}^{n}$ for $0 \le j \le q_k \le n$ $(1 \le k \le v)$. もし $g_{i_{kj}} \in \{g_i\}_{i=n-m+1}^{n}$ならば、$w_{i_{kj}} = i$.

定理 4.1. G をリー半直積 $(\mathbb{R}^u \times \mathbb{C}^v) \rtimes_\alpha (\mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m)$ とし、αは対角作用とする。このとき、$C^*(G)$ は有限組成列 $\{\mathfrak{I}_j\}_{j=1}^K$をもち、次がなりたつ：

$$\mathfrak{I}_j/\mathfrak{I}_{j-1} \cong \begin{cases} C_0(\mathbb{R}^{u_0+n-m} \times \mathbb{C}^{v_0} \times \mathbb{Z}^m) & j = K \\ C_0(\mathbb{R}^{p_j} \times \mathbb{T}^{q_j} \times \mathbb{Z}^{r_j} \times \Omega_j) \otimes \mathbb{K}, & or \\ C_0(\mathbb{R}^{p_j} \times \mathbb{T}^{q_j} \times \mathbb{Z}^{r_j}) \otimes \mathfrak{A}_{\Theta_j} \otimes \mathbb{K} & 1 \le j \le K-1 \end{cases}$$

with $p_j, q_j, r_j \ge 0$. ただし、$\hat{\alpha}$による不動点空間は $\mathbb{R}^{u_0} \times \mathbb{C}^{v_0}$に同相で、各$\Omega_j$は軌道部分空間で、$\hat{\alpha}$はその上で遊走的である。また、$\mathfrak{A}_{\Theta_j}$は高次元非可換トーラスである。

さらに、より一般の場合に、次が成り立つ：

定理 4.2. G を $\mathbb{R}^u \times \mathbb{C}^v$の連結リー群 N によるリー半直積で、対角作用をもつとする。このとき、$C^*(G)$ の有限組成列 $\{\mathfrak{I}_j\}_{j=1}^K$が存在して、次がなりたつ：

$$\mathfrak{I}_j/\mathfrak{I}_{j-1} \cong \begin{cases} C_0(\mathbb{R}^{u_0} \times \mathbb{C}^{v_0}) \otimes C^*(N) & j = K \\ C_0(\mathbb{R}^{p_j} \times \mathbb{T}^{q_j} \times \mathbb{Z}^{r_j} \times \Omega_j) \otimes C^*(N_{z_j}) \otimes \mathbb{K} & or \\ C_0(\mathbb{R}^{p_j} \times \mathbb{T}^{q_j} \times \mathbb{Z}^{r_j}) \otimes C_r^*(W_j) \otimes \mathbb{K} & 1 \le j \le K-1 \end{cases}$$

with $p_j, q_j, r_j \ge 0$. ただし、$\mathbb{R}^{u_0} \times \mathbb{C}^{v_0}$は N の双対作用による不動点部分空間で、各Ω_jは軌道部分空間で、N のその上の双対作用は遊走的である。N_{z_j}は $\mathbb{R}^u \times \mathbb{C}^v$の N-不変部分空間の点 z_jの固定群で、$C_r^*(W_j)$ は N-不変なトーラス上の軌道に関する *reduced* 亜群 W_jの *reduced* C^*-環である。

さらに、次がいえる：

系 4.3. 定理 4.2 で、N が連結巾零リー群か、リー半直積 $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$ ならば、次が成り立つ：

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(C^*(G)) = \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 & \textit{if } \dim \hat{G}_1 \textit{ is even}, \\ \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 \le \mathrm{sr}(C^*(G)) \le \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 + 1 & \textit{if } \dim \hat{G}_1 \textit{ is odd}, \end{cases}$$

$$\mathrm{csr}(C^*(G)) \le \mathrm{csr}(C_0(\hat{G}_1)) = [(\dim \hat{G}_1 + 1)/2] + 1.$$

903-0213 沖縄県西原町千原一番地　琉球大学理学部数理科学科

E-mail address: sudo@math.u-ryukyu.ac.jp